VỀ MÔĐUN GIẢ-s-NỘI XẠ

LƯƠNG THỊ MINH THỦY
Khoa Giáo dục Mầm non, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế

Tóm tắt: Bài báo này giới thiệu về lớp môđun giả-s-nội xạ. Một R-môđun phải M được gọi là N-giả-s-nội xạ nếu mọi đơn cấu $f : K \to M$ có thể mở rộng được đến một đồng cấu $g : N \to M$ trong đó N là R-môđun phải và K là môđun con của môđun con suy biến $Z(N)$. Chúng ta thu được nhiều tính chất của lớp môđun này và áp dụng vào vành.
Từ khóa: Môđun giả-s-nội xạ, môđun nội xạ, môđun con suy biến

1 GIỚI THIỆU

Môđun nội xạ và xạ ảnh là các lớp môđun quan trọng trong lí thuyết vành kết hợp. Để mở rộng lớp môđun nội xạ, các tác giả có thể dùng tiêu chuẩn Baer hoặc trực tiếp từ định nghĩa.

Một môđun N_R là nội xạ nếu mọi đơn cấu từ K_R vào M_R, $K, M \in Mod - R$, mọi đồng cấu f luôn tồn tại đồng cấu $\bar{f} : N \to M$ sao cho $\bar{f}$ là mở rộng của f, tức là biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd}
 & N_R & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & M \arrow[ul, "\bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

như vậy, N_R là nội xạ $\Leftrightarrow$ N_R là M_R-nội xạ, $\forall M \in Mod - R$.

Tiêu chuẩn Baer cho biết chỉ cần R-nội xạ là đủ cho N_R là nội xạ. Cụ thể là:

Tiêu chuẩn Baer (Kiểm tra tính nội xạ của một môđun): Môđun N_R là nội xạ nếu với mọi iđean phải $I_R \leq R_R$, mọi đồng cấu $f : I_R \to N_R$ luôn tồn tại đồng cấu

Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Huế, Đại học Huế
ISSN 1859-1612, Số 04(48)/2018: tr. 5-11
Ngày nhận bài: 12/6/2018; Hoàn thành phản biện: 12/9/2018; Ngày nhận đăng: 14/9/2018

$\bar{f}: R_R \to N_R$ sao cho $\bar{f}$ mở rộng của f, tức là biểu đồ sau sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} & N_R & \\ 0 \arrow[r] & I_R \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & R_R \arrow[ul, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

(trong đó $i: I_R \hookrightarrow R_R$ là đơn cấu chính tắc).

Nhờ tiêu chuẩn Baer, chúng ta có định nghĩa các lớp môđun sau: *P-nội xạ (F-nội xạ)*, *GP-nội xạ*, *nội xạ đơn*...(xem [6], [7])

Các mở rộng của môđun nội xạ theo hướng từ định nghĩa gốc là môđun C-nội xạ, để nội xạ mạnh, giả nội xạ, FP-nội xạ, vv...(xem [5], [12])

Trong bài báo này, tôi muốn giới thiệu về môđun giả-s-nội xạ theo hướng mở rộng từ định nghĩa gốc của nội xạ.

Cho M_R, lúc đó $Z(M) = \{m \in M | r_R(m) \leqslant^e R_R\}$ được gọi là môđun con suy biến của M. Các khái niệm khác có thể tìm trong [11].

2. VỀ MÔĐUN GIẢ-s-NỘI XẠ

Nhắc lại rằng, một môđun M là N-giả nội xạ nếu mỗi môđun con A của N thì mọi đơn cấu $f: A \to M$ đều mở rộng được đến đồng cấu $g: N \to M$. Môđun M được gọi là giả nội xạ nếu M là M-giả nội xạ. Và một môđun M được gọi là N-s-nội xạ nếu mọi đơn cấu $f: K \to M$ mở rộng được đến N, trong đó K là môđun con của môđun con suy biến $Z(N)$, M được gọi là s-nội xạ nếu M là R-s-nội xạ. Ở đây chúng ta sẽ đi tổng quát hóa hai trường hợp trên.

Định nghĩa 1.1. Cho M, N là các R-môđun phải, M được gọi là N-giả-s-nội xạ nếu mọi đơn cấu $f: K \to M$ có thể mở rộng được đến một đồng cấu $g: N \to M$ trong đó K là một môđun con của môđun con suy biến $Z(N)$.

M được gọi là giả-s-nội xạ mạnh nếu M là N-giả-s-nội xạ với mọi R-môđun phải N.

M được gọi là giả-s-nội xạ nếu M là M-giả-s-nội xạ.

Nhận xét 1.2.

(1) Nếu $Z(M) = M$ thì khái niệm *"giả-s-nội xạ"* trùng với khái niệm *"giả nội xạ"*.

(2) Vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ là giả-s-nội xạ nhưng không nội xạ.

Sau đây là một số tính chất của lớp môđun giả-s-nội xạ. Trước hết ta có đặc trưng của môđun giả-s-nội xạ.

Mệnh đề 1.3. *Cho M là một R-môđun phải. Các mệnh đề sau là tương đương:*

(1) M là môđun giả-s-nội xạ.

(2) Mọi R-đơn cấu $\beta : 0 \to A \to M$ và $\alpha : 0 \to A \to N$, trong đó N nhúng trong M và $A \leq Z(M)$, tồn tại $\gamma \in Hom_R(N, M)$ sao cho $\beta = \gamma\alpha$.

(3) Mọi R-đơn cấu $\beta : 0 \to A \to M$ và $\alpha : 0 \to A \to N$, trong đó N là môđun con của M và $A \leq Z(M)$, tồn tại $\gamma \in Hom_R(N, M)$ sao cho $\beta = \gamma\alpha$.

(4) Mọi R-đơn cấu $\beta : 0 \to N \to M$ trong đó N là môđun con của M thì β có thể mở rộng thành một tự đẳng cấu của M.

Chứng minh.

(1) $\Rightarrow$ (2) Cho $0 \to A \xrightarrow{\beta} M$ và $0 \to A \xrightarrow{\alpha} N$ là các dãy khớp. Vì N nhúng trong M nên tồn tại một R-đồng cấu $\gamma_1 : N \to M$ và $\gamma_1\alpha : 0 \to A \to M$ là một đơn cấu. Theo giả thiết M là môđun giả-s-nội xạ nên tồn tại một tự đồng cấu $\gamma_2 \in End(M_R)$ sao cho $\beta = \gamma_2\gamma_1\alpha$. Đặt $\gamma_2\gamma_1 = \gamma : N \to M$, khi đó $\beta = \gamma\alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) là rõ ràng.

(4) $\Rightarrow$ (1) Cho $0 \to A \xrightarrow{\alpha} M$ và $0 \to A \xrightarrow{\beta} M$ là các dãy khớp. Khi đó $\alpha : A \to Im\alpha$ là một đẳng cấu, vì vậy tồn tại $\alpha^{-1} : Im\alpha \to A$ sao cho $\alpha^{-1}\alpha = 1_A$ và $\beta\alpha^{-1} : 0 \to Im\alpha \to M$ là đơn cấu. Theo giả thiết tồn tại $\gamma \in End(M_R)$ sao cho $\gamma|_{Im\alpha} = \beta\alpha^{-1}$ và với mọi $a \in A$ $\gamma\alpha(a) = \beta\alpha^{-1}\alpha(a) = \beta(a)$. Do đó $\gamma\alpha = \beta$.

□

Tính chất sau cho ta biết đến tích trực riếp, tổng trực tiếp, môđun con, hạng tử trực tiếp của các môđun giả-s-nội xạ.

Mệnh đề 1.4.

(1) Cho N là một R-môđun phải và $\{M_i : i \in I\}$ là họ các R-môđun phải. Khi đó tích trực tiếp $\prod_{i \in I} M_i$ là môđun N-giả-s-nội xạ nếu và chỉ nếu mỗi M_i là môđun N-giả-s-nội xạ, $i \in I$.

(2) Cho M, N và K là các R-môđun phải với $K \leqslant N$. Nếu M là môđun N-giả-s-nội xạ khi M là môđun K-giả-s-nội xạ.

(3) Cho M, N và K là các R-môđun phải với $K \cong N$. Nếu K là môđun M-giả-s-nội xạ thì N là môđun M-giả-s-nội xạ.

(4) Cho N là một R-môđun phải và $\{A_i; i \in I\}$ là một họ các R-môđun. Khi đó N là môđun $\bigoplus_{i \in I} A_i$-giả-s-nội xạ nếu N là môđun A_i-giả-s-nội xạ, với mọi $i \in I$.

(5) Một R-môđun phải M là giả-s-nội xạ nếu và chỉ nếu M là môđun P-giả-s-nội xạ với mọi R-môđun xạ ảnh P.

(6) Cho M, N và K là các R-môđun phải với $N \leqslant^{\oplus} M$. Nếu M là môđun K-giả-s-nội xạ thì N là môđun K-giả-s-nội xạ.

(7) Nếu A, B và M là các R-môđun phải, $A_R \cong B_R$, và M là môđun A-giả-s-nội xạ khi đó M là môđun B-giả-s-nội xạ.

Chứng minh.

Các khẳng định từ (1) đến (4) là rõ ràng.

Khẳng định (5) được suy ra ngay từ (4).

Chứng minh (6). Cho $f : L \to N$ là một R-đơn cấu, trong đó L là môđun con suy biến của N. Khi đó, ánh xạ $\iota \circ f : L \to M$ có thể mở rộng thành một R-đồng cấu $g : K \to M$, trong đó $\iota : N \to M$ là một phép nhúng. Rõ ràng ánh xạ $\pi \circ g : K \to N$ là một mở rộng của f, trong đó $\pi : M \to N$ là môt phép chiếu thông thường trên N.

Chứng minh (7). Cho $f : A_R \to B_R$ là một R-đẳng cấu và $g : K \to M_R$ là R-đơn cấu, trong đó K là môđun con suy biến của B. Hạn chế của f trên $Z(A)$ là đẳng cấu $f/Z(A_R) : Z(A_R) \to Z(B_B)$. Theo giả thiết, ánh xạ $g \circ f : K \to M_R$ có thể mở rộng thành một R-đồng cấu $\eta : A_R \to M_R$. Vậy ánh xạ $\eta \circ f^{-1} : B \to M$ là một mở rộng của g. $\square$

Từ đó ta suy ra ngay ba kết quả sau:

Hệ quả 1.5. *Cho N là một R-môđun phải.*

Các khẳng định sau đây là đúng:

(1) $\bigoplus_{i \in I} A_i$ là môđun N-giả-s-nội xạ (hoặc là giả-s-nội xạ mạnh, hoặc là giả-s-nội xạ) nếu A_i là môđun N-giả-s-nội xạ (hoặc là giả-s-nội xạ mạnh, hoặc là giả-s-nội xạ).

(2) Một hạng tử của môđun N-giả-s-nội xạ (hoặc là giả-s-nội xạ mạnh, hoặc là giả-s-nội xạ) cũng là một môđun N-giả-s-nội xạ (hoặc là giả-s-nội xạ mạnh, hoặc là giả-s-nội xạ).

Hệ quả 1.6. *Cho M là một R-môđun phải và $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ trong R, trong đó e_i là các lũy đẳng trực giao. Khi đó M là môđun giả-s-nội xạ nếu và chỉ nếu M là môđun e_iR-giả-s-nội xạ với mỗi i, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Hệ quả 1.7. *Cho M là một R-môđun phải, e và f là các phần tử lũy đẳng của R, $eR \cong fR$ và M là môđun eR-giả-s-nội xạ. khi đó M là môđun fR-giả-s-nội xạ.*

Đối với môđun hữu hạn sinh, tổng trực tiếp cúa các môđun giả-s-nội xạ có các tính chất sau:

Mệnh đề 1.8. *Nếu N là một R-môđun phải hữu hạn sinh, khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(1) Tổng trực tiếp các môđun N-giả-s-nội xạ là môđun N-giả-s-nội xạ.

(2) Tổng trực tiếp các môđun giả nội xạ là môđun N-giả-s-nội xạ.

(3) $Z(N)$ là Nơte.

Chứng minh.

(1) $\Rightarrow$ (2) là rõ ràng

(2) $\Rightarrow$ (3)

Xét chuỗi $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ những môđun suy biến của N và $U = \bigoplus_{1 \leq i} U_i$.

Gọi $E(N/U_i)$ là bao nội xạ của N/U_i, $i \geq 1$, và $f : U \to \bigoplus_{1 \leq i} E(N/U_i)$ là ánh xạ được định nghĩa bởi $f(n) = (u + U_i)$ và chứng minh được f là một đơn cấu.

Vì $\bigoplus_{1 \leq i} E(N/U_i)$ là N-giả-s-nội xạ nên f có thể mở rộng thành một R-đồng cấu $\bar{f}$: $N \bigoplus_{1 \leq i} E(N/U_i)$.

Từ giả thiết N là hữu hạn sinh nên $\bar{f}(N) \subseteq \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E(N/U_i)$ với mỗi n, khi đó $f(U) \subseteq \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E(N/U_i)$ và $U = U_{j-n}$ với mọi $j \geq 1$.

Do đó $Z(N)$ là Nơte.

(3) $\Rightarrow$ (1) Cho $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ là một tổng trực tiếp các môđun N-giả-s-nội xạ và $f : U \to E_R$ là một đơn cấu của những R-môđun phải, trong đó $U \subseteq Z(N)$.

Vì $Z(N)$ là Nơte ta có $f(U) \subseteq \bigoplus_{i \in I} E_i$ với mỗi tập con hữu hạn $F \subseteq I$.

Vì tổng trực tiếp hữu hạn những môđun N-giả-s-nội xạ là môđun N-giả-s-nội xạ nên f có thể mở rộng thành một R-đồng cấu $\bar{f} : N \to E$. $\square$

Nhắc lại một khái niệm về môđun con suy biến cấp 2 của M như sau: Giả sử M là một R-môđun phải. Ta kí hiệu $Z_2(M)$ là môđun con (duy nhất) của M thỏa mãn điều kiện:

$$Z_2(M)/Z(M) = Z(M.Z(M))$$

$Z_2(M)$ được gọi là môđun con suy biến cấp 2 của M.

Sau đây chúng ta có một số tính chất liên quan giữa môđun giả-s-nội xạ và môđun con suy biến cấp 2 của M.

Mệnh đề 1.9. *Cho M, N là các R-môđun phải sao cho $Z_2(M)$ là giả nội xạ. Khi đó mọi đơn cấu $f : K \to M$, trong đó $K \leq Z_2(M)$, có thể mở rộng đến N.*

Chứng minh.

Cho $M = Z_2(M) \oplus T$, trong đó $Z_2(M)$ là giả nội xạ và $Z(T) = 0$.

Nếu $f : K \to M$ là một đơn cấu, $K \leq Z_2(M)$ sao cho $f(Z(K)) = 0$. Khi đó $f(K) \cong K/Ker(f)$ là môđun suy biến. Vì vậy f có thể mở rộng đến N. Bây giờ giả sử rằng $0 \neq f(k) \in T$ vì vậy $f(kR) \cong kR/Ker(f|_{kR})$ là suy biến. Điều này mẫu thuẫn với giả thiết, do đó $f(K) \cap T = 0$. Nếu $f(k) = a + b$ trong đó $a \in Z_2(M)$ và $b \in T, bR \cap f(kR) = 0$, thì $r(a) \leq r(b)$ và ánh xạ $g : aR \to bR$ xác định bởi $ar \mapsto br$ có $Kerg$ là cốt yếu trong aR. Vô lí. Do đó mọi đơn cấu $f : K \to M$ trong đó $K \leq Z_2(M)$ mở rộng được đến N.

□

Sau đây là một đặc trưng của môđun giả-s-nội xạ mạnh.

Mệnh đề 1.10. *Cho M là một R-môđun phải. Các mệnh đề sau là tương đương:*

(1) M là môđun giả-s-nội xạ mạnh.

(2) M là $E(M)$-giả-s-nội xạ, trong đó $E(M)$ là bao nội xạ của M.

(3) $M = I \oplus K$, trong đó K không suy biến và I là giả nội xạ với $Z(M) \leq^e I$

(4) $Z_2(M)$ là giả nội xạ.

(5) M là G-giả nội xạ với mọi môđun xoắn Goldie G.

(6) M là E-giả nội xạ, trong đó $E = E(Z_2(M))$ là bao nội xạ của $Z_2(M)$.

Chứng minh. Được suy ra trực tiếp từ các kết quả của giả-s-nội xạ. □

Hệ quả 1.11. *Cho M là một R-môđun phải xoắn Goldie. Khi đó M là giả nội xạ nếu và chỉ nếu M là giả-s-nội xạ mạnh.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[2] V. Camillo, Y. Ibrahim, M. Yousif, Y. Zhou, *Simple-direct-injective modules*, J. Algebra 420 (2014), 39-53.

[3] J. Chen, N. Ding, Y. Li and Y. Zhou, *On (m,n)-injectivity of modules*, Commu. Algebra, 29(12), 5589-5603 (2001).

[4] Nasr A. Zeyada, *S-Injective Modules and Rings*, Advances in Pure Mathematics, 2014, 4, 25-33.

[5] W.K. Nicholson, J.K. Park, M.F. Yousif, *Principally quasi-injective modules*, Comm. Algebra, 27(4) (19909), 1683–1693.

[6] W.K. Nicholson and M.F. Yousif. *Quasi-Frobenius Rings*, Cambridge Univ. Press. , 203.

[7] W.K. Nicholson and M.F. Yousif, *Mininjective ring*, J. Algebra, 187 (1997), 548-578.

[8] L. V. Thuyet, L. T. M. Thuy and T. C. Quynh, *On quasi nil-injective modules*, Annales Unis Sci. Budapest., Sect. Comp. 44 (2015) 93-107.

[9] L. T. M. Thuy, *Về môđun 2-tựa nội xạ linh*, Tạp chí Khoa học Đại Học Huế - KHTN; ISSN 1859-1388, tập 126, số 1A (2017), 67-79.

[10] J. Wei and J. Chen, *Nil-injective rings*, Int. Electron. J. Algebra, 2 (2007), 1-21.

[11] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading, 1991.

[12] DU Xian-neng, ZHAO Chun-e, *Pseudo-Injective Modules and Principally Pseudo-Injective Modules*, the National Naturak Science Foundation of China, 2007.

Title: ON PSEUDO-s-INJECTIVE MODULES

Abstract: We introduce a new class of modules that is pseudo-s-injective modules. A right R-module M is called N-pseudo-s-injective if for every monomorphism $f : K \to M$, it can be extended to a homomorphism $g : N \to M$ in which N is a right R-module and K is a submodule of the singular submodule $Z(N)$. Many properties of pseudo-s-injective modules and related ring were obtained.

Keywords: Pseudo-s-injective module, injective module, singular submodule.